我希望在讲授常微分方程课之前能学到的十个教训

Gian-Carlo Rota

我年轻时犯了许多错误，其中之一是写了一本常微分方程的教科书[1]，这使我的数学生涯倒退了好几年. 不过我也从中得到回报：它使我认识到，我并不真正了解微分方程. 我教微分方程越久，就越感觉到对微分方程的奥妙之处理解不够.

编写这本教材的几个不愉快的后果之一是，我被要求在麻省理工学院教授大二学生的微分方程. 无论老师还是学生，都公认为这门课是最不讨人喜欢的本科数学课程. 我的一些同事公开宣称，他们宁可从麻省理工学院辞职，也不愿教这门课. 我这样威胁可不顶用，因为我在本系被误认为是该课程的权威专家. 我从前编写这本现在仍在印刷的初等教材，简直就是犯罪.

麻省理工学院数学系对教师教学具有最高权威的系主任，向我摇晃着我编的这本教材，默默地注视着我. 在她的鼓动下，我只好点头，同意下一年继续教这门可怕的课程，这意味着我将重复自 1958 年首次教微分方程以来每年都犯的同样错误.

在我这个年纪，想让我纠正任何错误，几乎是不可能的. 为了减轻我的负罪感，我换了一下思路，决定以摩西十诫的方式来介绍我的十个教训. 我要列举的这些愚蠢的错误、误解和偏见，不会引起媒体的热议，你可能也对这些错误熟悉得都想倒胃口了. 那么，我为什么要将它们公之于众呢？因为我总是很高兴听到我的观点能引起共鸣. 所以，这次大家听完我的长篇大论后，我希望也如此.

1. 教训 1　现在在微分方程入门课程中所用的大多数材料都已过时

不久前，我收到了 Cauchy (柯西，1789–1857) 的微分方程入门课程的著作，它由施普林格出版社在纪念 Cauchy 去世 140 周年之际重印. Cauchy 在 19 世纪中叶讲授这门课程，他的讲义以他那个时代的数学家常用的引人入胜的流畅风格写成.

阅读上世纪一位伟大的数学家所撰写的、并且是读者本人熟悉领域的著作，是一大快事. 但是，我很惊讶地发现，自 Cauchy 以来，常微分方程教材基本没有任何变化. 事实上，唯一的变化是引入了方程组. 从我还是研究生的那一天起，微分方程的教学效果就一路下滑.

当我阅读 Cauchy 的教材时，我意识到，我们现在所用的教材有许多内容都已经过

译自：美国 Massachusetts Lowell 大学数学科学系 Dan Klain 教授的主页，原文链接 `https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Rota.pdf`.

Gian-Carlo Rota, 1932–1999, 生前是美国麻省理工学院应用数学系和哲学系教授.

1) G. C. Rota 指的是他与 G. Birkhoff (伯克霍夫) 合写的《常微分方程 (Ordinary Differential Equations)》，1962 年首次出版，1989 年出版了第 4 版. —— 译注

时. 这些陈腐的内容在书中出现的顺序, 与 Cauchy 的教材都完全一样. 最荒谬的是, 开篇就列出一些五花八门的、却被认为是很有用的技巧, 如恰当微分方程、积分因子、齐次微分方程, 诸如此类的荒谬 "奇技淫巧". 可以说, 工程实践中很少用到这种微分方程, 微分方程的配套练习很少能在实际应用中有用武之地. 事实上, 自 Euler (欧拉, 1707–1783) 以来, 这套练习一直沿用, 变化不大. 讲授该课的大多数教师没有认识到, 除了这种初等教材中所讲的应用, 微分方程还可以应用到哪些方面. 他们就像遵循一种宗教仪式一样, 严格遵循教材内容编排的传统顺序; 缺乏对微分方程理论更深入的理解, 他们也不想轻易去尝试改变微分方程的授课内容.

为什么没有人敢承担彻底清除微分方程积弊的任务? 我大胆猜测到一个原因 —— 出于同样的原因, 今天的生活, 无论在社会、政治、还是在科学方面, 与以往相比都没有多少变化 —— 既得利益者支配着我们社会群体生活的方方面面, 数学家群体也不例外. 微分方程初等教材如果被修订的话, 大学里因循守旧的教授就得重新熟悉新的教材. 那些正陷入市场销售困境的不严谨的、昂贵的、彩页教材最终会绝版, 必须编写新的教材. 谁都知道, 编写一本教材需要付出多少努力, 而其回报又是那么地少. 没有一个头脑清醒的年轻数学家会像我一样, 冒着有损职业生涯的风险来编写新教材.

大二的微分方程课程永远不会有变化, 它也许会自然消亡, 或被一些处理微分方程实际应用的短课程所代替. 希望这些新课程是由数学家而不是工程师讲授: 任何数学系的预算完全取决于基础课中招收的工科学生的数量. 如果不是工程师慷慨地把这些课程让给数学家讲授, 数学系必将消失.

2. 教训 2　在课程开始时, 把一阶微分方程的介绍减至最少

我最喜欢的数学教材之一是 Boole (布尔,1815–1864) 的《微分方程 (Differential Equations)》, 它与 Cauchy 的微分方程讲义大约同时出版, 并被数学的大恩人 Chelsea 出版公司重印. 全书约有一半专门讨论一阶微分方程的解法, 其眼花缭乱的介绍迄今为止无可匹敌.

对于当今跟微分方程打交道的人来说, Boole 奇妙的解法毫无用处. 其中只有两个方法沿用至今: 变量分离与换元. 积分因子方法已成为一个笑话, 尽管工程师偶尔会为之辩护 (稍后会提到). 在我一生中, 从未听说有人通过求出积分因子来解一阶微分方程. 尽管存在这样的明显事实, 我们还是在积分因子上花了一两节课, 板起脸来告诫学生它们很重要.

3. 教训 3　掌握常系数线性微分方程的求解是最低要求

本部分内容分为两个教训: 第 1, 确保学生学会如何求解常系数线性微分方程, 这是基本的数学能力. 即使最差的学生, 也必须掌握二阶常系数线性微分方程的解法. 这是授课教师不可推卸的责任.

第 2, 删除变系数线性微分方程解法的相关内容. 为什么? 出于以下 4 个理由:

(1) 除了 Euler–Cauchy 微分方程, 即微分方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=0$$

外，没有其他二阶变系数线性微分方程可以精确求解，除非引入特殊函数．大约 30 年前，Bessel (贝塞尔) 函数被写入教学大纲，但是在今天，这种情况不会发生．

我认为，讲授一个无法提供真实例子的内容会使人很迷茫．

(2) 数学上最优美的理论之一是二阶微分方程的 Sturm–Liouville (施图姆 - 刘维尔) 理论．零点分离定理、极小极大性质、本征值和本征函数的存在性定理，曾被认为具有重大的教育意义，不论教材内容有多么初等，都是微分方程教材不可或缺的内容．直到有一天，两个现实让我震惊．首先，我意识到，Sturm 和 Liouville 的美妙定理其实毫无用处．但可以肯定的是，这些定理已成为研究数学的重要灵感来源：全正矩阵的理论由此演变而来，而 Chebyshev (切比雪夫) 系统现在其实已成为组合学的一章．Morse (莫尔斯) 理论是从 Sturm-Liouville 理论发展而来的拓扑学的一章．

(3) 还有一个更糟糕的认识．当我们讲授变系数二阶线性微分方程时，我们的脑海中就会闪现本征值和本征函数的问题．对有限区间上的非奇异 Sturm-Liouville 系统，其谱理论完全可以用基本的方法给出，包括本征函数完备性的证明．在诸如 “工程中的数学方法” 之类的课程中，可以找到这样的内容 (我必须要惭愧地承认，拙著中也有)．然而，我可以保证，在数学、物理学或工程学中，都不会出现有限区间上的非奇异 Sturm-Liouville 本征值问题的实例．数学、物理或工程学中出现的所有 Sturm-Liouville 系统，都是奇异的，而要确保其理论最低限度的严谨性，就需要引入谱理论的概念，而这不仅超出微分方程入门课程的范围，甚至超出第 2 课程的水平．总之，我们所教的关于变系数二阶线性微分方程的一切知识点，相互之间没有任何关联．

(4) 那么，我们是否该让学生宁肯不了解变系数线性微分方程中的存在性理论？如果不是，那么我们在初级微分方程的教学中给学生讲什么？我时常难以抗拒地探索微分方程理论的未知领域之一 —— 微分代数 [1)]的诱惑．据我所知，还没有人对这个美妙的学科做过初步的阐释．Abraham Cohen 于 1920 年代出的书 [2)]是最接近此领域的书，至今仍被如饥似渴地 (秘密地) 阅读着．我大胆建议，即便入门水平的学生也要去了解微分代数的两个结果．第 1 个结果我将在这个篇幅本已很长的教训快收尾时讲，第 2 个结果则留到下一个教训中讲．我总是很兴奋地告诉学生，二阶线性微分方程虽然没有通解公式，但有由两个解所组成的 Wronski (朗斯基) 行列式的精确公式．如果已知一个解，根据 Wronski 行列式就可以找到第 2 个解 (顺便说一句，关于这一点，你可以在 Boole 的书中找到一些典型的例子)．[3)]但是有一个更基本的事实：如果决定在初等的课堂上尝试讲这些内容，那就得对我这里的数学表述删繁就简．二阶线性微分方程的两个解的每个微分多项式，若它不依赖于基本解组的选择，则它可以表示为 Wronski 行列式和微分方程系数构成的一个多项式 (这是对称函数基本定理在微分方程中的类比，我们点到为止)．

---

1) 有兴趣的读者可以参见 J. H. Hubbard, B. Lundell, A first look at differential algebra. American Mathematical Monthly, 118 (2009), No. 3, 245–261. 有中译文：微分代数初探，《数学译林》，2011 年第 3 期．—— 译注

2) An Elementary Treatise on Differential Equations, 1906 年出版，1920 年再版．—— 译注

3) 有兴趣的读者，可以参见 Birkhoff-Rota 著作第 45 页．—— 译注

4. 教训 4　讲授变量代换

不管学生在以后从事什么样的工作，可以肯定的是，他们必须掌握一阶和二阶微分方程的变量代换．应该花一些时间来详细讲授变量代换．幸运的是，变量代换的相关内容仍然包含在教材中，不过再版的教材中没有阐释这一必要内容应有的重要性．更糟糕的是，没有人意识到，变量代换不仅是技巧，而且还是一套连贯的理论 (它是经典不变量理论的微分类比，这个暂且不谈).

对于二阶线性微分方程，因变量和自变量的代换公式是已知的，但是这些公式在本世纪编写的任何一本教材中都找不到，虽然这些公式非常有用．

Liouville 在一个二阶线性微分方程的系数中发现了一个微分多项式，他将其称为不变式.[1] 他证明了两个二阶线性微分方程可以通过变量代换相互转化，当且仅当它们具有相同的不变式．这个定理在任何章节都找不到．在我的第一版书中，只是在习题中提及了一下，而我的合作者坚持认为在以后的版本中应该省略这些内容．

5. 教训 5　淡化解的存在唯一性定理

请允许我提出另一个有争议的意见：常微分方程解的存在性定理没有吹捧的那么重要．它是"心理学定律"在无差别的数学结果中的再现，它满足了我们获取某种东西的心理渴望．实际上，直到 19 世纪末，人们才意识到需要证明存在性定理，但我不相信像 Cauchy 或 Riemann (黎曼) 这样的人没有想到这一点．他们很可能考虑了证明存在性定理的可能性，但他们认为不值得去研究这个问题．

如果存在没有解的常微分方程的例子，则存在性定理会有意义得多．(这种情况在偏微分方程中会出现，因此在偏微分方程中存在性定理特别有意义．)

唯一性定理是一个更敏感的问题．当我不得不未经证明就告诉学生，常系数二阶线性微分方程的通解是两个线性无关解的线性组合时，我感到很内疚．有时我会在课堂上讲解：上述结论证明的要点是微分方程

$$y' = ay$$

的通解是 $y = ce^{ax}$．但我的证明过程没能让人信服．多数情况下，一些学生会追问"那又如何？"这个可怕的问题．我忍住了没有讲这个结果的矩阵类比，它可以轻松证明方程组的唯一性，进而证明一切常系数线性微分方程的解的唯一性．我不知道有什么办法可以摆脱这种僵局．

6. 教训 6　常系数线性微分方程组应是课程的重点

求解常系数线性方程组是学生在微分方程学习中应该掌握的重要知识点．无论学生选择科学技术的哪一个研究领域，他们都必然会遇到大型线性方程组．大型方程组求解的计算机化使学生更应该意识到这一理论的重要性，包括矩阵的本征值和本征向量，矩阵指数以及相关的一切内容．

在这里，我们再次遇到了缺乏相关例证的情况．在过去的 30 年中，在控制论、经济学、信号处理甚至数学中，发现了许多有趣的常系数微分方程组．这些引人入胜的示例

1) 对于 $y'' + Py' + Qy = 0$, 其不变式是 $Q_0 = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P'$.—— 译注

目前都未进入教材相关内容的介绍中. 目前, 在教材中出现的矩阵方程的所有例子要么是索然无味的, 要么是人造的.

有关方程组的章节中一些一成不变的内容, 应毫不犹豫地删除. 可悲的是, 广为宣扬的常数变易法毫无用处, 甚至很难给学生布置一些可以用该方法求解的习题. 如果学生曾经学过 Feynman (费曼) 图, 请引导他们用恰当的方法继续学习它.

旧版本的常数变易方法被用来求解变系数非齐次二阶线性微分方程, 这可能是常微分方程历史上最糟糕的丑闻. 几百年来, 一本又一本的教材逐字逐句地重复着同样的人造例子, 直至今日 (顺便说一句, 没有其他例子). 可悲的是, 在人们认识到 Green (格林) 函数的基本作用之前, 这样的论点充斥着成千上万无戒备意识的课堂, 甚至在目前的一些教材中仍然可以找到, 那些因循守旧的教授喜欢它.

7. 教训 7　删去恰当微分方程

现在来谈谈我最讨厌的事情 —— 积分因子. 自 1800 年以来, 教材中就提出了积分因子的方法, 这是很荒谬的. 我们可以给出一个严格的、启发性的微分方法, 该方法不需要任何吹捧, 也不需要以尚未定义的 “微分形式” 来夺人眼球. 有人要求我描述旧教材中这部分内容不严密的地方, 我会利用这些时间来给出取代这部分内容的严密解释, 在这一点上, 我占据了先机. 对积分因子的荒谬描述如下. 为了求解一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

用 “微分形式” 改写为方程 (不管它到底意味着什么)

$$Mdx + Ndy = 0.$$

我们用 “这是另一种表达方式或重写微分方程” 的说法, 或说一些同样糟透的谎言来为这种突然引入的微分做辩护.

接下来, 我们不加证明地给出如下结论: 总是有可能求出函数 $q(x,y)$, 使得微分方程

$$qMdx + qNdy = 0.$$

是恰当微分方程. 然后, 我们用常规的方法继续 “求解” 该恰当微分方程.

在这一点上, 一些反应快的学生会问: 微分方程

$$Mdx + Ndy = 0 \quad \text{和} \quad qMdx + qNdy = 0$$

“相同” 还是 “不同”? 如果老师以前曾说过这两个都是同一微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

的重写形式, 那么他 (她) 会被当场质疑. 这时, 老师会耳提面命学生, 你们可能无法理解这种深奥的数学, 并命令他们掌握这种方法, 因为它 “行得通”. 这时老师通常提高嗓音, 而学生的反应是把目光投向了当前课堂使用的教材上. 这种糊弄性的解释不仅是对教师才智的吹嘘, 而且贬低了学生的智力, 暗示老师拥有更加深奥的知识, 而学生因太愚笨而无法跟老师分享其中的奥妙.

现在让我们看看如何简单而又严格地解释积分因子及相关的恰当微分方程. [1)]

---

1) 请参看林琦焜, 积分因子 ——Lie 群之观点, 《数学传播》 2017 年第 2 期. —— 译注

第 1 步 基于微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

我们考虑平面自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=N(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=-M(x,y).\end{cases}$$

至关重要的是，解释微分方程的解和系统的解之间的关系. 该自治系统的解是轨线，它们是线素场中赋予线素方向的参数曲线. 相应的微分方程的解是积分曲线，它们的图像是没有方向的轨迹图. 通常情况下，比起求解微分方程，求解相应的自治系统更为方便. 为什么？因为有很多平面自治系统对应相同的微分方程，如对于任意函数 q, 形式为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=q(x,y)N(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=-q(x,y)M(x,y)\end{cases}$$

的所有系统都对应于同一个微分方程. 由于历史原因，此类系统有时以新奇的形式写为

$$qMdx+qNdy=0,$$

但是应该明白，这种误导性的写法只是微分方程自治系统的另一种表述方式.

改变系统中的因子 q 会改变轨线的速率，而积分曲线保持不变. 我们可以并且应该用引人注目的几何示例来说明这种现象.

第 2 步 经过这些准备之后，学生们已经准备好问题：我们是否可以恰到好处地选取因子 q 以便能够求解相应的微分系统，从而求解微分方程吗？现在，人们可以借助向量场的几何特性来选取积分因子. 现在积分因子作为因子 q 被引入，后者使得向量场在几何和解析等多种意义上成为“最佳”的，这些是教师所取之源. 通过恰当向量场的地形解释，可以直观地理解恰当微分方程.

我赶紧补充一点，我一点也不“反对”微分形式. 相反，我相信我们很快会被迫在大学数学课程中增加外微分形式运算的基础课程. 在麻省理工学院，我们已经感受到来自一些工程部门的压力而在这样做.

8. 教训 8 避免应用型问题

我曾经问过我的一位同事，为什么他如此喜欢应用性问题，他的回答是：“我喜欢它们，因为通过这些应用性问题可以给学生传授解决问题的技巧.”

我同事的回答犯了一个常见的推理错误. 该错误的一个显著实例是，旧的剑桥荣誉学位考试 (tripos) 制度. 受到讽刺批评之后，G. H. Hardy (哈代) 改正了该错误. 为了学位考试，学生必须在专业培训师的指导下训练多年. 最好的培训师能意识到考试中可能用到的一切技巧，并确保学生会在恰当的时候运用恰当的技巧. 旧的剑桥荣誉学位获得者的名字已被遗忘，我们听说过的数学家很少有人获得过剑桥荣誉学位.

我同事的错误在于，他们认为材料的可测试性越高，就越容易教. 盛行的做习题和搞测验，使成绩的分配更加“客观”. 这门课程变成了技巧游戏，这一游戏中，操作能力

胜过理解能力.

我们在微分方程教材中发现了一些可耻的应用型问题，它们是人为的，虚假的，不实用的，矫揉造作的，重复的和无关紧要的. 我看不出通过强迫学生解决扫雪机问题或连通罐中盐水的 Rube Goldberg 流 [1] 问题而使他们学到任何东西.

大多数学生上微分方程课，是为了掌握一些可用于解决其职业中遇到的实际问题的技巧. 经济专业的学生遇到的 "应用问题" 与化学工程专业的学生遇到的 "应用问题" 完全不同. 我们不能指望，在同一个应用问题的总括之下涵盖如此多的 "应用问题".

9. 教训 9　Laplace (拉普拉斯) 变换的恰当引入

通常我们在考虑常系数线性微分方程的初值问题时引入 Laplace 变换，然而这种动机非常勉强：对 Laplace 变换取逆并非一件容易的事，而且初值问题也可用其它方法求解.

我不知道如何以恰当的动机引入 Laplace 变换. 请允许我发表一些零散的评论.

(1) 就 Laplace 变换而言，"函数" 一词的两种截然不同的用法很危险地被混淆了. 首先是函数的一般概念，即具有图像的东西. 第 2 个是作为密度时截然不同的概念，无论是质量密度还是概率密度. 为了论证方便，让我们同意将第 2 类函数称为 "密度函数". 专业的数学家通过各种逃避来避免面对密度函数，例如 Stieltjes (斯蒂尔切斯) 积分，测度等. 但实际上，在物理学和工程学中，当今通用的密度函数的称谓是优越的，我们最好正视它.

(2) 密度函数有时可通过绘制其图像来描述，但这种描述是误导. 在某一点上的密度函数 "值" 是没有意义的. 要使得密度函数有意义，那应该是求密度函数从 a 到 b 的积分. 这样的积分给出了包含在区间 $[a, b]$ 中的质量，或者给出了随机变量取值于 a 和 b 之间的概率.

(3) 一旦确定了密度函数的概念，就很容易进行下一步，即对 Dirac (狄拉克) δ 函数进行简单而严格的处理.

确实如此，由于某一点的密度函数值无关紧要，因此找不到任何理由来解释密度函数应该具有图像，密度函数需要的都是积分.

如果你认为具有积分的 "函数" 也应该具有图像，就会遇到麻烦. 应当尽快去除这种偏见. c 点的单位质量是最简单的、没有图象的密度函数. 这一点可以通过如下详细解释来说明：如果 $[a, b]$ 不包含点 c, 则 Dirac δ 函数 $\delta_c(\mathrm{x})$ 在区间 $[a, b]$ 的任何积分等于零；如果区间 $[a, b]$ 中包含点 c, 则 $\delta_c(x)$ 等于 1. 根据这个定义，Dirac δ 函数的所有性质都可以轻松得出，而没有必要借助于可取无限值的函数. 应该通过计算 Dirac δ 函数的导数来说明该方法. 像物理学家和工程学家一样，保留密度函数的函数符号没有错，只要记住，不能求密度函数的数值，而只能对其进行积分.

(4) 普通函数以常规方式相乘，而对密度函数相乘则没有物理意义. 密度函数有另一乘法，即卷积. 向学生介绍卷积的一个好方法是计算两个密度函数的卷积，每个密度函

---

1) Rube Goldberg 机械是一种被设计得过度复杂的机械组合，去完成一些其实是非常简单的工作，例如倒一杯茶，或打一个蛋等等. —— 编注

数都是 Dirac δ 函数的和：

$$\sum_i \delta_{a_i} \quad 与 \quad \sum_j \delta_{b_j}$$

的卷积是密度函数

$$\sum_{i,j}(\delta_{a_i}+\delta_{b_j}).$$

试试看：你会喜欢这个方法的.

(5) 这一项是我的个人表白.

每次我教 Laplace 变换时，我都会为自己应该做但是没有成功做的事而感到懊悔. 毫无疑问，关于卷积的最杰出的结果、也是最鲜为人知的结果之一是 Titchmarsh (蒂奇马什) 卷积定理. 它可以最简单地表述为：如果两个函数的卷积在区间 $[0,b]$ 中恒为零，则存在 $0<a<b$, 使得其中一个函数在区间 $[0,a]$ 中恒为零，另一个函数在区间 $[0,b-a]$ 也恒为零. 目前尚无该定理的初等证明. Titchmarsh 的证明使用大量的复变量方法. Mikusiński (米库辛斯基) 给出了一个伪初等证明. 我很想在有生之年看到 Titchmarsh 卷积定理的 "真" 证明. [1)]

10. 教训 10　讲授概念，而不是技巧

期望学生从初级微分方程课中学到什么？绝对不是 "奇技淫巧"! 充满了技巧内容的课程没有意义. 一年后，学生们会忘记这些技巧，因为大多数技巧都是毫无用处的. 把课程目标定位为 "技巧" 是很失败的，不能将由此导致的失败归咎于学生的准备不足、不愿学习、因懒惰而不去做练习.

在微分方程基础课程中，学生应学习一些今后能记住的基本概念，例如指数函数的普遍存在性，稳定性，系统的轨线与可积系统之间的关系，相平面分析，Laplace 变换，甚至部分分式与通过 Laplace 变换计算的卷积之间的迷人关系. 谁在乎学生是否能够熟练解决那些需要技巧才能解决的问题. 重要的是，他们能意识到课程的重点，能从微分方程的必然性和对数学技巧的迷恋中走出来. 这些目标可以通过扩大学生的文化视野、选取比学生现阶段水平稍高的学习材料来更好地实现.

如果我们相信本科教学的目的是传递信息，那我们就是在自欺欺人. 信息是微分方程的基础课程次要的特征. 今天有比坐在教室里获取此类信息的更好的方式. 承担本科课程老师的角色就像公关人员、演艺人员、宣传员、布道者、魔术师和牧师一样. 如果在课程结束时每个学生都认为自己上了 "一门好课程", 即使学生不知道自己在该课程中学到了哪些具体东西，这样的老师也是好老师.

(杨变霞 译　林开亮 校)

1) Rota 在 Ten Mathematics Problems I will never solve 一文 (`http://giancarlorota.org/problem/problem.pdf`) 中列出了 10 个问题, Titchmarsh 卷积定理位列第 3, 并且 Rota 在对这一问题的点评中还提到了华裔数学家陈国才的工作，值得注意.—— 译注